DAVID HERNÁNDEZ
Autor de funwithfunctions.es

CONTAR LAS MATEMÁTICAS

Conejos dorados, asteroides y otras curiosidades históricas

PAIDÓS
paracuriosos

David Hernández

CONTAR LAS MATEMÁTICAS

Conejos dorados, asteroides y otras curiosidades históricas

PAIDÓS

1.ª edición, febrero de 2022

Paidós es un sello editorial de Editorial Planeta, S. A.
Avda. Diagonal, 662-664
08034 Barcelona, España
www.paidos.com
www.planetadelibros.com

ISBN 978-84-493-3903-5
Fotocomposición: Pleca Digital, S. L. U.
Depósito legal: B. 150-2022
Impresión y encuadernación en Liberdúplex, S. L.

Diseño de la cubierta: Planeta Arte & Diseño
Imagen de la cubierta: © Graphixmania, miniwide, Ahmed Ebrahim, Saleh Gaga, Vastard, Granate Art / Shutterstock

Impreso en España – *Printed in Spain*

PEFC
PEFC/14-38-00305
Certificado PEFC
Este libro procede de bosques gestionados de forma sostenible y fuentes controladas
www.pefc.es

SUMARIO

1

LOS INICIOS DE LA NUMERACIÓN

MONOS CON CALCULADORA

Hace unos treinta millones de años ya existían primates con características similares a las de los actuales monos. Los científicos especializados en el comportamiento animal creen que los animales pueden llegar a comprender el concepto de número e incluso que algunos son capaces de aprender a contar si se les enseña.

Varios experimentos han demostrado que hasta los animales más inesperados pueden entender diferencias de magnitud y cantidad. Se cree que la forma de contar básica que muestran estos animales es una adaptación evolutiva para juzgar entre dos grupos de comida cuál es el que ofrece una mayor seguridad, para medir la proporción de competidores sexuales o para estimar los recursos disponibles cuando se desplazan a una nueva zona.

A los leones, por ejemplo, se les da muy bien distinguir si tienen ventaja numérica sobre otra manada. Experimentos con rugidos han demostrado su capacidad para analizar este hecho, habilidad que comparten con las hienas y los chimpancés. Incluso se ha comprobado que los peces son capaces de elegir un grupo de comida mayor que otro.

Hay muchas evidencias de que contar es algo innato en los simios, nuestros parientes más cercanos. En los años ochenta, un chimpancé se convirtió en el primer animal que contó utilizando números arábigos. Para ello, el chimpancé tuvo que comprender que los símbolos tienen un valor, por ejemplo, que «3» representaba tres manzanas que podía coger. Otros, como los monos Rhesus, superaron en velocidad a un grupo de estudiantes universitarios en una prueba que consistía en seleccionar entre dos imágenes con un número determinado de puntos o figuras cuál era el mayor agrupamiento.

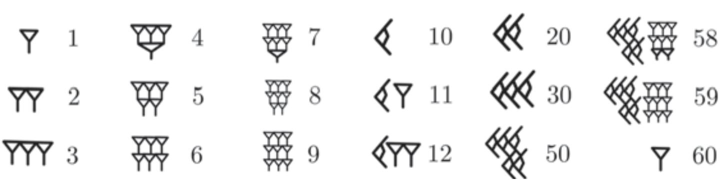
Parece lógico que los animales apliquen estas habilidades para escoger la cantidad de alimento mayor, aunque en otros experimentos con marsupiales se probó que estos eran capaces de elegir a la inversa, es decir, el grupo de comida menor. El experimento se llevó a cabo con una pantalla táctil en la que los marsupiales tenían que escoger entre dos imágenes con diferentes puntos y, si elegían la imagen con la cantidad de puntos menor, recibían un caramelo, si no, recibían una pequeña descarga eléctrica. Es una forma un poco cruel de demostrar que estos animales son capaces de contar, pero el experimento probó que en casi todos los casos los animales aprendieron a elegir la imagen con la menor cantidad de puntos. Seguramente algunos de estos monos y marsupiales serían muy capaces de sacarse algún que otro máster en según qué universidad.

LOS INICIOS DE LA NUMERACIÓN

La historia de las matemáticas comienza con la invención de símbolos escritos para denotar números. Hacia el año 3000 a. C. los sumerios desarrollaron una elaborada forma de escritura, la conocida como escritura cuneiforme (en forma de cuña). Se extrajeron casi un millón de tablillas de arcilla de las arenas mesopotámicas. Unos pocos cientos de ellas tratan sobre matemáticas y astronomía, y muestran que los babilonios tenían un amplio conocimiento de ambas disciplinas. En particular, eran astrónomos expertos y desarrollaron un simbolismo sistemático para los números con el que podían representar los movimientos que observaban en el cielo con muchísima precisión.

Los símbolos numéricos babilónicos son los más antiguos que se conocen y van mucho más allá de un simple sistema de recuento. Utilizaban dos tipos diferentes de cuña, una para representar el número 1, y otra para el número 10. Estas cuñas se disponían en grupos para indicar los números del 2 al 9 y del 20 al 50. Al llegar al 59 esta pauta terminaba y se volvía a utilizar la primera cuña, pero con un segundo significado, el del número 60. Se dice por ello que el sistema de numeración babilónico es de base 60, o sexagesimal. Es decir, el valor de un símbolo puede ser un número o 60 veces dicho número, dependiendo de la posición del símbolo. Esto es similar a nuestro actual sistema decimal, en el que el valor de un símbolo se multiplica por 10, o por 100, o por 1.000 en función de su posición.

Lo más probable es que los antiguos habitantes de Babilonia utilizasen el sistema de base de 60 ya que este es el número más pequeño que se puede dividir entre todos los enteros del 1 al 6, lo que convierte este sistema en un método de cálculo muy cómodo.



DATO CURIOSO

¿Por qué contamos hasta 10?

El motivo es obvio: tenemos diez dedos en las manos y, con ellos, podemos contar el mundo que nos rodea. Los antropólogos están convencidos de que este sistema surgió justamente por esta razón y no por otra, aunque durante la historia de las civilizaciones han existido otras muchas maneras diferentes de contar, además del sistema sexagesimal mesopotámico que acabamos de ver.

Los mayas usaban el 20 como base, y otros pueblos de la Antigüedad en Norteamérica usaron el 4 como número de referencia. Incluso hoy, en Papúa Nueva Guinea, hay pueblos nativos que basan su numeración en el 24.

A pesar de que el sistema decimal logró imponerse en la mayor parte del mundo, no todos creen que sea el mejor método para contar. Existe un movimiento que desde la década de los cuarenta del siglo XX aboga por el cambio de la base 10 a la base 12. Y ¿por qué 12? Pues porque este número tiene más divisores que el 10. Mientras que 10 solo se puede dividir de forma exacta entre 2 y 5 (además de 1 y 10), 12 es divisible entre 2, 3, 4 y 6 (además de 1 y 12). Esto implicaría una mayor facilidad tanto para multiplicar como para hacer operaciones con fracciones.

Los 60 segundos en un minuto, los 60 minutos en una hora o los 360 grados en un círculo se remontan a la antigua Babilonia. Así que cuando medimos un ángulo o miramos las manecillas de nuestro reloj, estamos contando como lo hacían nuestros antepasados hace unos cinco mil años.

BASES DE NUMERACIÓN

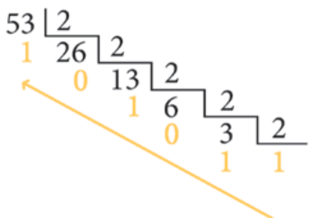
Una base es un sistema de numeración en el que utilizamos un número determinado de símbolos concretos. Por ejemplo, en el sistema decimal o de base 10, cada una de las posiciones se puede ocupar con hasta diez valores diferentes, que son los números del 0 al 9.

En el sistema binario, conocido especialmente por ser el lenguaje interno de los ordenadores, solo se utilizan dos valores para cada posición, el 0 o el 1. El 0 representa un interruptor apagado y el 1, un interruptor encendido. El paso de un número decimal a binario y viceversa es muy sencillo. Los primeros números naturales solo requieren pensar un poco en el sistema posicional. Lógicamente 0 y 1 en decimal son también 0 y 1 en binario, pero para escribir 2 en binario necesito utilizar un hueco más, dos cifras, y el primer número que se puede escribir con dos cifras es 10. El siguiente, 3 en decimal, sería 11 en binario, y el siguiente, 4, como ya no tengo más posibilidades con dos cifras, añado una cifra más, así que 4 será 100 en binario.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	10	11	100	101	110	111	1000

Para pasar a binario un número decimal más grande, por ejemplo, el número 53, solo tengo que dividir el número consecutivamente entre 2, como en la imagen, y tomar el resultado del último cociente y todos los restos obtenidos de derecha a izquierda.

Con lo que 53 en binario se escribiría como 110101.



Si quiero hacer la operación a la inversa, pasar 110101 a decimal, lo que tengo que hacer es multiplicar cada una de las cifras en binario por la potencia de 2 que le corresponda, empezando por 20 desde la derecha y luego sumando los resultados. Quedaría así:

$$1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 +$$
$$+ 1 \cdot 2^0 = 32 + 16 + 4 + 1 = 53$$

Otro sistema de numeración muy utilizado en informática es el sistema hexadecimal, en el que se pueden utilizar hasta dieciséis símbolos diferentes en cada una de las posiciones. Pero, si solo conocemos los símbolos para los números del 0 al 9, ¿cómo podemos escribir y representar cantidades en un sistema de numeración que tiene hasta dieciséis símbolos? La respuesta es simple, utilizando otros seis símbolos nuevos. Por convenio utilizamos las letras mayúsculas desde la A hasta la F para completar los seis símbolos que faltan. A=10, B=11, C=12, D=13, E=14 y F=15. Así, desde 0 hasta F, conseguimos una base con dieciséis símbolos.

En informática es muy útil porque simplifica la expresión binaria de los objetos. El byte es la unidad básica de información y está compuesto de ocho bits, es decir, un conjunto de ocho ceros y unos. Con un solo byte se puede codificar desde el 00000000 hasta el 11111111.

$$00000000 = 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 0$$

$$11111111 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 2 + 2 + 1 = 255$$

Por lo tanto, con un byte podemos representar 256 valores, desde el 0 hasta el 255. Pero para ello necesitamos ocho dígitos. La ventaja del sistema hexadecimal es que para representar los mismos valores solo necesitamos dos dígitos: desde el 0 hasta el 255, que en hexadecimal sería FF. Como los ordenadores cada vez tienen más memoria, este sistema nos permite identificar cada hueco o directorio de una forma mucho más sencilla con muchos menos caracteres. Esa es su principal utilidad, la optimización de espacio o de memoria.

Para pasar un número en base 2 a base 16 solo tenemos que agrupar sus cifras de cuatro en cuatro empezando por la derecha y convertir cada uno de esos números a base 10 como ya hemos visto anteriormente. Los que sobrepasen el 9 los escribiremos como letras de la A hasta la F como ya sabemos. Por ejemplo, el número 10111001011101 quedaría así:

$$10 - 1110 - 0101 - 1101 = 2 - 15 - 5 - 14 = 2E5D$$

Otra utilidad de este sistema es el intérprete de texto, que con dos valores en hexadecimal representa hasta 256 posibles letras o comandos, como el código de caracteres ASCII, con el que se pueden escribir comandos de texto, signos de puntuación, letras mayúsculas y minúsculas, números, letras con tildes, y un montón de símbolos más con los que, hasta no hace mucho, nos las ingeniábamos para escribir emoticonos *vintage*.

También es muy útil para otorgar el color digital, que se expresa en el sistema RGB (*red*, *green*, *blue*, los tres colores primarios). Cualquier otro color es mezcla de estos tres colores. El sistema da información sobre la intensidad de cada color básico para crear el nuevo color. La intensidad de un color varía desde 0 hasta 255, y para no escribir muchas cifras se utiliza un sistema hexadecimal. De este modo a cualquier color le corresponde un código de seis dígitos de forma que los dos primeros corresponden a la intensidad del rojo, los dos siguientes a la del verde y los dos últimos a la del azul.

Por ejemplo, el color que se ha utilizado para ilustrar este libro en RGB (color digital, no color de impresión) es el F2CB65 en hexadecimal. Esto quiere decir que utiliza una mezcla que se consigue con F2 = 242 de rojo (R), CB = 203 de verde (G) y 65 = 101 de azul (B).

MESOPOTAMIA, LOS TEOREMAS QUE SE ADELANTARON MIL AÑOS

Las matemáticas en la antigua Babilonia se centraron inicialmente en casos prácticos, como hallar la superficie de los campos de cultivo o dividir los alimentos entre un número impar de personas. Hacia finales del periodo babilónico las matemáticas empezaron a tener un carácter más complejo, con elaborados cálculos astronómicos en los que se muestran los primeros indicios de la exploración matemática.

Los babilonios fueron capaces de resolver ecuaciones de segundo y tercer grado, pero en vez de utilizar la notación algebraica y los símbolos que usamos actualmente, como *x* o *y* para las incógnitas, o *a* y *b* para los coeficientes, utilizaban largas y elaboradas frases. Llegaron incluso a resolver ecuaciones de segundo grado de esta forma, aunque en este caso solo eran capaces de obtener las soluciones positivas, ya que aún no se conocían los números negativos, pero era suficiente para la utilidad práctica que caracterizaba sus matemáticas.

En una de las tablillas de arcilla más famosas de esta época, la conocida como Plimpton 322, que data aproximadamente del año 1800 a. C., aparece una relación de ternas pitagóricas enormes formadas a partir de la fórmula $p^2 - q^2$, $2pq$, $p^2 + q^2$, siendo ambos números enteros positivos y con p mayor que q. Por ejemplo, si $p = 3$ y $q = 2$, deducimos la siguiente terna pitagórica (5, 12, 13). Una terna pitagórica, por si te lo estabas preguntando, es un conjunto de tres números enteros positivos que cumplen el teorema de Pitágoras, como en este ejemplo, donde ocurre que: $5^2 + 12^2 = 13^2$.

Estas son las dieciséis primeras ternas pitagóricas que conocían los babilonios y que desarrollaron a través de la fórmula anterior: (3, 4, 5); (5, 12, 13); (7, 24, 25); (8, 15, 17); (9, 40, 41); (11, 60, 61); (12, 35, 37); (13, 84, 85); (16, 63, 65); (20, 21, 29); (28, 45, 53); (33, 56, 65); (36, 77, 85); (39, 80, 89); (48, 55, 73); (65, 72, 97).

Esto indica que los babilonios ya conocían el teorema de Pitágoras, aunque no lo denominasen así, ya que faltaban muchos años para el nacimiento de su pretendido autor y tampoco habrían encontrado mucha más aplicación práctica que el simple hecho de calcularlo.

Como se puede deducir de su increíble dominio de las ternas, los babilonios utilizaban con mucha soltura los cuadrados perfectos, es decir, los números que son cuadrados de los números enteros (1, 4, 9, 16, 25…) y conocían muchas propiedades para obtenerlos, como por ejemplo que la suma de los n primeros números impares es igual al cuadrado de n, es decir, que si sumamos los tres primeros números impares, obtenemos el cuadrado de 3, y así sucesivamente:

$$1=1^2$$
$$1+3=2^2$$
$$1+3+5=3^2$$
$$1+3+5+7=4^2$$
$$1+3+5+7+9=5^2$$
$$1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$$

Otra curiosa forma de obtener cuadrados perfectos sumando enteros, y que tiene mucho que ver con la anterior, es escalando desde el 1 hasta el número del que queremos obtener el cuadrado y después volver a bajar hasta el 1:

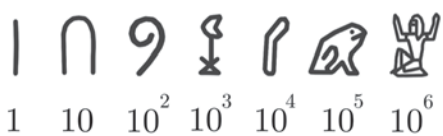
$$1=1^2$$
$$1+2+1=2^2$$
$$1+2+3+2+1=3^2$$
$$1+2+3+4+3+2+1=4^2$$
$$1+2+3+4+5+4+3+2+1=5^2$$
$$1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1=6^2$$

En otros textos posteriores a la tablilla se puede comprobar también como ya en Mesopotamia conocían la semejanza entre triángulos, las áreas de figuras geométricas como triángulos y trapecios y los volúmenes de algunos prismas y del cilindro, aunque para su cálculo usasen un valor aproximado de $\pi=3$. También sabían que todos los ángulos inscritos en una semicircunferencia son rectos.

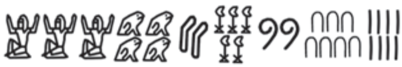
EL NILO Y LA INVENCIÓN DE LA GEOMETRÍA

Siempre pensamos que los griegos son la fuente original de todas las matemáticas, pero incluso los propios griegos se basaron en una civilización que era ya muy antigua en la época clásica. Gracias a los vestigios de esta civilización, especialmente gracias a la información encontrada en su monumental arquitectura, se han podido comprender algunos de los principales principios matemáticos que después resultaron básicos para el desarrollo de la base matemática griega.

Muchos de los grandes genios de las matemáticas de la antigua Grecia viajaron a Egipto para aprender de esta cultura. Los egipcios administraron grandes extensiones de tierra, graneros, ganado e impuestos durante muchísimos años. Los escribas eran una de las figuras más relevantes de la sociedad y tenían un importante sistema educativo que formaba a los jóvenes con una gran base matemática. Por desgracia, lo único que tenemos para comprobarlo son dos papiros, uno conocido como papiro de Rhind o de Ahmes, que data aproximadamente del año 1650 a. C. y otro papiro conocido como papiro de Moscú, de aproximadamente el año 1890 a. C.



Los egipcios utilizaban un sistema decimal o de base diez. Los números se forman por agrupaciones y se van sumando sucesivamente grupos de símbolos que pueden llegar a agruparse hasta en grupos de nueve, dispuestos en grupos más pequeños para que sean más fáciles de comprender de un solo vistazo, como en este ejemplo:

3.425.278 = 

Este sistema de numeración ocupaba tanto espacio en los valiosos papiros que los egipcios tuvieron que desarrollar un sistema mucho más complejo de jeroglíficos para escribir números más grandes en menos espacio.

Según Aristóteles, las matemáticas en el Antiguo Egipto fueron originadas y desarrolladas por la clase sacerdotal, que tenía el tiempo necesario para dedicarse a estudiarlas. Más de dos mil años más tarde se obtuvo una comprobación exacta de esta observación mediante el descubrimiento del papiro de Rhind. El documento original se titula «Orientaciones para conocer todas las cosas oscuras» y es una colección de problemas de geometría y aritmética que se centra especialmente en la reducción de fracciones como suma de fracciones unitarias. Incluso con nuestra notación actual este trabajo es bastante complicado.

El sistema egipcio de cálculo con fracciones es el aspecto más notable de su aritmética. Los egipcios utilizaban solo fracciones unitarias, es decir, fracciones en las que el numerador es uno. Para expresar una fracción que no fuese unitaria inventaron un complejo método de sumas para llegar hasta esa otra fracción. Veamos un ejemplo:

$$\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$$

Los egipcios usaban un práctico truco mnemotécnico para recordar las primeras fracciones unitarias que tenían como denominador las potencias de dos, es decir, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32 y 1/64. Cada una de estas fracciones se representaba como una parte del famoso ojo de Horus. Dibujando partes de este ojo se entendía que se sumaban los inversos de las potencias de dos y así se conseguían otras fracciones no unitarias diferentes como, por ejemplo: 5/8=1/2+1/8, que se representaría con la parte izquierda del ojo, que era 1/2, más la ceja, que representaba 1/8.

Al comienzo del papiro de Ahmes había una tabla muy útil para los estudiantes en la que podían ver cómo obtener las fracciones más complejas a partir de las fracciones unitarias. Igual que las tablas de logaritmos o de senos y cosenos que se utilizaron miles de años más tarde, o como la tabla de distribución normal que se entrega a los estudiantes en todos los exámenes de matemáticas de las pruebas de acceso a la universidad actualmente.

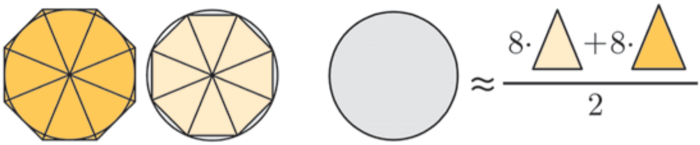
Los egipcios hicieron progresos asombrosos en agricultura gracias a los conocidos como extendedores de cuerdas, que emplean cuerdas con nudos a la misma distancia entre sí para medir sus terrenos. Con estos nudos podían construir ángulos rectos y triángulos rectángulos. Con una cuerda de doce nudos

podían construir un triángulo rectángulo con lados de tres, cuatro y cinco nudos respectivamente, de lo que se deduce que ya conocían las ternas pitagóricas, al menos la más sencilla de todas ellas, ya que tres al cuadrado más cuatro al cuadrado es igual a cinco al cuadrado.

Uno de los problemas más conocidos del papiro de Ahmes es el problema 79, que habla de 7 casas, 49 gatos, 343 ratones, 2.401 espigas y 16.807 granos. Este es el primer problema de la Antigüedad que se conoce en el que se utilizan las potencias de un mismo número sucesivamente, en este caso las potencias de 7. Ahora nos conformamos con que nuestros alumnos sepan las tablas de multiplicar hasta el diez, pero hace unos tres mil años los estudiantes trabajaban con tablas de potencias, muchísimo más complejas que las simples tablas de multiplicar.

Otro problema muy avanzado era el número 50 del papiro de Ahmes, que decía que un campo circular, de diámetro nueve unidades, tenía la misma área que un cuadrado de lado ocho unidades. Este es el primer intento conocido en la historia de cuadrar el círculo, un problema que después fue clave para los griegos, aunque lo más importante para ellos era resolverlo utilizando únicamente una regla y un compás. Los egipcios llegaron a una aproximación de π de 3,16, que no está nada mal para aquella época.

También sabían calcular muy bien el área de un triángulo, así que se les ocurrió inscribir una circunferencia dentro de un octógono y a su vez inscribir otro octógono dentro de esta, para después calcular el área de los dos octógonos descomponiéndolos en triángulos y, haciendo la media entre el área del octógono grande y el pequeño, obtener una aproximación bastante precisa del área del círculo.



Este método fue perfeccionado por Arquímedes cientos de años más tarde cuando utilizó su método exhaustivo para hallar el valor de π con polígonos inscritos y circunscritos de muchísimos más lados, aunque la idea original es la misma.

Los papiros muestran que la mayoría de los problemas egipcios eran de carácter aritmético, especialmente con fracciones, y resueltos por métodos similares a las reglas de tres o por tanteos. En el papiro de Rhind aparecen ecuaciones lineales de la forma $x+ax+bx=c$ donde a, b, c, son números conocidos y x es la incógnita, que ellos llamaban *ahá* o montón. Para hallar el valor de la incógnita utilizaban el método de *regula falsi*, o de la regla falsa. Este método consistía en dar una solución por aproximación, pero errónea. Después comparaban el resultado que se debía obtener con el resultado real. Mediante proporciones ajustaban la solución errónea y así conseguían llegar a la solución correcta.

A pesar de todos estos grandes logros, uno de los principales problemas de las matemáticas del Antiguo Egipto era la falta de distinción entre una solución exacta y una aproximada. Además, al igual que en Mesopotamia, las matemáticas egipcias no consiguieron abstraer los casos concretos a una teoría general. Esto no ocurriría hasta la época helénica.